ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 35.3 (2017): 89-106
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2348
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

La geometría analítica en España durante el siglo XIX: estudio de las soluciones negativas de una ecuación

Analytical geometry in Spain during the nineteenth century: a study of the negative solutions of an equation

Isabel M.ª Sánchez Sierra
IES Vía de la Plata. Guijuelo. Salamanca
isamss@yahoo.com

M.ª Teresa González Astudillo
Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca, Salamanca, España
maite@usal.es

RESUMEN • Este artículo muestra el estudio e interpretación de las soluciones negativas de un problema geométrico presentes en los libros de texto de Geometría Analítica utilizados en España durante el siglo XIX. Mediante el análisis de contenido de once obras hemos identificado tres interpretaciones de las soluciones negativas: indican un cambio de posición, señalan un error en las hipótesis del problema o una posible modificación del enunciado que da lugar a un problema más general, o bien la existencia de una cantidad inversa.

PALABRAS CLAVE: números negativos; geometría analítica; matemáticas en España; historia de la educación; educación matemática.

ABSTRACT • This article shows the study and interpretation of the negative solutions of a geometric problem found in the textbooks of Analytical Geometry used in Spain during the nineteenth century. Through the content analysis of eleven books, we have identified three interpretations of negative solutions: they indicate a change of position; they point out an error in the hypotheses of the problem or a possible modification of the formulation that implies a more general problem, or the existence of an inverse quantity.

KEYWORDS: negative numbers; analytical geometry; mathematics in Spain; history of education; mathematics education.

Recepción: marzo 2017 • Aceptación: julio 2017 • Publicación: noviembre 2017

INTRODUCCIÓN

Los números negativos forman parte de aquellos conceptos matemáticos que presentan tal complejidad y características de abstracción que históricamente su aceptación y formalización tardaron en llegar y, además, su desarrollo y consolidación produjeron a lo largo del tiempo marcadas diferencias epistemológicas entre los matemáticos de la época (Maz y Rico, 2009; Schubring, 2005). Estos problemas se siguen presentando en la práctica diaria de la enseñanza matemática, lo que ha hecho que sean muchas las investigaciones en educación matemática que se ocupen del estudio de los números negativos desde distintos aspectos: epistemológico, didáctico, histórico y conceptual (Maz y Rico, 2007). Nuestro problema de investigación reside en la interpretación de las soluciones negativas en los problemas de Geometría Analítica durante el siglo XIX y las dificultades que los geómetras de la época encontraron en ellas.

Estas dificultades se venían arrastrando desde el mismo nacimiento de la Geometría Analítica; de hecho, en su *Geometría*, Descartes rechaza las soluciones negativas de un problema por considerarlas *falsas* (Descartes, 1637). Los geómetras del siglo XIX las aceptan e interpretan, pero siguen siendo un problema para ellos, como muestra el extenso tratamiento que la mayoría hace sobre el tema en sus obras.

Hasta el último cuarto de siglo podemos encontrar dos versiones de Geometría Analítica en los libros de texto. Una, basada en el concepto de lugar geométrico y en el uso de coordenadas, similar a la que conocemos actualmente, y otra –muy próxima a la geometría de Descartes– denominada por muchos geómetras *aplicación del álgebra a la geometría*, que es donde se encuentran los problemas con las soluciones negativas.[1]

El problema radica en que, al igual que hacía Descartes, en el siglo XIX se operaba con segmentos en vez de con números, es decir, se consideraba que todas las letras que aparecían en una ecuación representaban segmentos de recta. La forma de resolver un problema consistía en pasar del planteamiento geométrico al algebraico dando nombre a los segmentos involucrados, hallar la solución de la ecuación obtenida y finalmente construirla con regla y compás. Todo esto obligaba, por una parte, a que las ecuaciones fueran siempre homogéneas y se supiera *construir las fórmulas* algebraicas, y por otra a dar una interpretación a las soluciones negativas ya que, en principio, no tenían sentido pues representaban segmentos negativos. El objetivo de este trabajo es identificar el tratamiento que los matemáticos decimonónicos hacían de estas soluciones.

Comenzaremos la exposición justificando la importancia de la investigación histórica dentro del campo de la investigación en educación matemática y el uso del libro de texto como fuente documental en este tipo de investigaciones. Explicaremos la metodología seguida en el análisis de los textos para centrarnos posteriormente en el estudio de las soluciones negativas.

EL LIBRO DE TEXTO EN LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Pocos temas hay que se presenten más disociados de su historia que las Matemáticas; sin embargo, mostrar el proceso de desarrollo de los conceptos matemáticos desde su origen hasta su forma final resulta ser una herramienta muy útil en el campo de la educación matemática. Diversas investigaciones (Sierra, 1997; Maz, 1999; González, 2004; Maz, Torralbo y Rico, 2006) ponen de relieve que la integración de la historia de las Matemáticas en la enseñanza supone un elemento importante en la

1. Denotaremos esta última como Geometría Analítica también, puesto que muchos geómetras así lo hacen en sus obras, refiriéndose indistintamente por este nombre a cualquiera de las dos citadas.

mejora de su calidad. Además, el análisis histórico-epistemológico puede ofrecernos una información muy interesante sobre el desarrollo del conocimiento matemático en el seno de una cultura y sobre los caminos en los que el conocimiento surge y cambia. El estudio de la historia permite conocer la aparición, en el desarrollo de un concepto, de dificultades epistemológicas que presentan una gran similitud con las que atraviesan los estudiantes (Sierra, 1997; Maz, 1999; González, 2004). Por todo ello el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza es legítimamente considerado una parte de la investigación en educación matemática (Bagni, 2000).

Gall, Borg y Gall (1996) consideran la investigación histórica como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan a preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas, tendencias y aspectos relacionados con la educación. Dentro de este tipo de investigación existen varias corrientes, entre las que se encuentra el análisis de los libros de texto (Gómez, 2003), en la que se enmarca este estudio.

El libro de texto fue durante años un objeto de estudio olvidado por los historiadores en educación; sin embargo, son múltiples los trabajos que han puesto de manifiesto en los últimos años la importancia del manual escolar (Delgado, 1983; Choppin, 2000; Puelles, 2000; Collados, 2008). Esta línea se fundamenta en que la realidad educativa está guiada más por los libros de texto que por las tendencias curriculares o los planes de estudio (Schubring, 1987). Desde el punto de vista de la historia de la educación, el libro de texto es una fuente inestimable ya que permite conocer las opiniones e ideas de sus autores o editores, así como encontrar sus orientaciones metodológicas, sus concepciones pedagógicas y los autores a los que se remiten (Delgado, 1983). Por otra parte, el manual escolar indica cómo ha sido llevada a la práctica la política educativa de un país, dado que selecciona, prioriza e impone unos contenidos frente a otros, así como una determinada forma de transmitirlos (Collados, 2008).

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

El estudio se llevó a cabo mediante el análisis de una selección de libros de texto del siglo XIX en los que aparece la Geometría Analítica. Dicho análisis, que forma parte de un trabajo más extenso (Sánchez, 2015), nos permitió caracterizar la Geometría Analítica en nuestro país en este siglo y estudiar, en particular, el uso de los números negativos en ella.

Se utilizó el método de análisis didáctico del contenido que diversos trabajos (Gómez, 2002; Maz, 2005; Rico, 2008; Maz, 2009) muestran como una herramienta eficaz para el estudio de manuales escolares. Las unidades de análisis han sido los problemas resueltos en esas obras, fijándonos en tres aspectos: la estructura conceptual, las representaciones externas (símbolos y gráficas) y el análisis fenomenológico (Gómez, 2002). Se determinaron dos grandes periodos temporales teniendo en cuenta el contexto histórico y educativo del país. A comienzos del siglo XIX se paralizaron los avances conseguidos en España en el estudio de las ciencias durante el siglo anterior y, aunque en la primera mitad se llevó a cabo cierta obra en el campo de las Matemáticas, no fue hasta mediados de siglo cuando se inició su recuperación, siendo en el último tercio cuando tuvo lugar su verdadera modernización (Peralta, 2009; Etayo, 1992). Gran parte del trabajo realizado por los matemáticos españoles de la época estuvo centrado en la enseñanza y difusión de los conocimientos, lo que se consiguió mediante la publicación de libros, algunos de los cuales alcanzaron una calidad notable (Maz y Rico, 2015).

La Geometría Analítica aparece en los libros de texto utilizados en la segunda enseñanza de la primera mitad del siglo y posteriormente, tras su creación en 1857, en la Facultad de Ciencias (Vea, 1999; Sánchez, 2015). Son estos niveles educativos a los que hemos restringido nuestro estudio y los dos grandes periodos a los que nos hemos referido: 1836-1857, el primero, y 1857-1906, el segundo.

Se seleccionaron diez libros, siendo el principal criterio considerado que la obra estuviera incluida en alguna de las listas oficiales de libros de texto de los planes de estudio de los niveles educativos estudiados. En caso de no haber listas oficiales se tuvo en cuenta la relevancia del autor en la época. A la hora de elegir la edición que debía consultarse se priorizó que esta estuviera disponible, aunque en algunos casos tal edición quedara fuera del periodo considerado.

Para la recogida de esos datos definimos diez campos divididos en dos categorías: referencia de la obra (que incluye título, autor, localización del manual consultado, año de la primera edición y de la edición consultada, editorial y lugar de edición) y caracterización de la estructura de la obra (extensión y estructura, el índice, los objetivos, autores en que se basa y los planes de estudio en los que aparece como texto oficial), que recogimos en una parrilla. También se realizó un pequeño estudio biográfico de los autores.

Con relación a los números negativos, este estudio de varias obras a lo largo del tiempo nos permitió observar las influencias de autores extranjeros en la matemática española de la época y la evolución seguida en el tratamiento de las soluciones negativas.

1836-1857. Nacimiento y desarrollo de la segunda enseñanza

En este primer periodo surge y se desarrolla este nuevo nivel educativo, distinguiéndose dos etapas dentro de él.

La primera se extiende hasta 1845, años en los que, aunque sobre el papel existe ya la segunda enseñanza, en la práctica el número de institutos es muy escaso. En esta etapa no se publican listas oficiales, pero existen un gran número de libros de texto con el título *Elementos de matemáticas*, que es como se denominan las asignaturas de Matemáticas en los planes de estudio de segunda enseñanza (Vea, 1995). Algunos de ellos se utilizaban en los seminarios de nobles, las escuelas militares o la Facultad de Filosofía, antes de la creación de la segunda enseñanza, y aparecerán en las listas de libros aprobadas a partir de 1845.

La segunda comprende el periodo 1845-1857. En estos años se consolida la nueva etapa educativa, aunque se mantiene su relación con la Facultad de Filosofía (estudios preparatorios para las facultades mayores), en cuyos planes de estudio aparece la Geometría Analítica. Durante este periodo cada año se publicaron listas de textos a principio de curso, exceptuando el curso 1845-1846.

Los libros seleccionados para este periodo son:

– Lista, A. (1825). *Elementos de matemáticas puras y mistas.* Tomo III. Madrid: Imprenta de Don Leon-Amarita.
  Este libro alcanzó su tercera edición en 1838, aunque se ha consultado la segunda.
– Vallejo, J. M. (1817). *Tratado elemental de matemáticas.* Madrid: Imprenta de Doña Catalina Piñuela.
  Fue reeditado por cuarta vez en 1841 y aparece en las listas oficiales para los cursos 1846-1847 y 1847-1848.
– Odriozola, J. (1829). *Curso completo de matemáticas puras*. Tomo III. Madrid: Imprenta que fue de García.
  Este libro fue escrito para la enseñanza militar, pero también se utilizó en la secundaria y aparece en las listas de libros para el curso 1846-1847.
– Lacroix, S. F. (1846). *Curso completo elemental de Matemáticas puras.* Tomo IV. Madrid: En la Imprenta Nacional.
  Esta obra aparece como texto en las listas de libros para la Facultad de Filosofía publicadas para los cursos 1846-1847 y 1847-1848.

No hemos hecho distinción entre los dos subperiodos a la hora de elegir los libros porque las obras que aparecen en las listas oficiales venían utilizándose desde principios de siglo.

1857-1906. La modernización de las ciencias en España

En este periodo podemos distinguir también dos etapas: la primera desde 1857 hasta 1868, y la segunda desde 1868 hasta 1906.

La primera comienza con la aprobación de la Ley Moyano, que llevará a cabo una profunda renovación del sistema educativo. En esta etapa comienza una tímida modernización de las ciencias en España, a lo que se intenta contribuir con la creación de la Facultad de Ciencias.

El auténtico impulso modernizador se dará a partir de 1868, gracias a la libertad ideológica existente en el Sexenio junto a la calma política de la Restauración (Peralta, 2009; Etayo, 1992), y alcanzará su clímax a finales de siglo. Desde el punto de vista educativo, en 1880 se aprueba un nuevo plan de estudios para la Facultad de Ciencias (Plan Lasala) que supuso un impulso para su desarrollo, el cual se vio reflejado en un aumento de las publicaciones (Millán, 1991). En 1900 se aprobó el plan de García Alix, que modernizó la Facultad de Ciencias y la equiparó a las de otras naciones europeas (Peralta, 1999).

En este periodo la Geometría Analítica pasa a formar parte de los planes de estudio de la Facultad de Ciencias. Existen listas de libros de forma continuada hasta 1867. Desde esa fecha no aparecen más hasta 1875, cuando se da permiso a los catedráticos para seguir el texto que quieran siempre que lo apruebe la Universidad, y no existen nuevas publicaciones hasta los años ochenta.

Los libros de texto seleccionados son:

Hasta 1868:

- Zorraquín, M. (1819). *Geometría analítica-descriptiva.* Alcalá: Impresor de la Real Universidad. Esta obra fue escrita para la academia militar, pero será recomendada como texto para el estudio de la Geometría Analítica en secundaria y en la Facultad de Ciencias desde el año 1847 a 1867 (es decir, ya se utilizaba en el periodo anterior). La única edición de este libro data de 1819.
- Gómez Santa María, A. (1846). *Tratado completo de matemáticas.* Tomo IV. Madrid: Imprenta Nacional.
  Desde su publicación en 1846 será recomendada como texto para el estudio de la Geometría Analítica en secundaria y en la Facultad de Ciencias desde 1847 a 1867.
- Cortázar, J. (1862). *Geometría Analítica*. Madrid: Imprenta de corrales y compañía.
  Esta obra se encuentra en las listas de libros de texto para la Facultad de Ciencias –donde fue catedrático de Geometría Analítica desde 1857 hasta 1873– publicadas entre los años 1858 y 1868.

Desde 1868 hasta 1906:

- Mundi, S. (1883). *Lecciones de Geometría Analítica*. Barcelona: Establecimiento tipográfico la academia de Evaristo Ullastres.
  Su autor fue catedrático de Geometría Analítica en la Universidad de Barcelona desde 1881.
- Sánchez Solís, I. (1883). *Geometría Analítica.* Madrid: Establecimiento tipográfico de G. Juste. Su autor fue catedrático de Geometría Analítica en la Universidad de Madrid desde 1876 a 1890. No se trata de una obra relevante, es más bien una guía para el profesor, pero suponemos que fue la utilizada en la Facultad de Ciencias de Madrid durante los años en que Sánchez Solís fue catedrático.
- Vegas, M. (1906). *Geometría Analítica.* Madrid: Establecimiento tipográfico de G. Juste.
  Su autor fue catedrático de Geometría Analítica en la Universidad de Madrid desde 1891 hasta 1935. Esta obra, editada por primera vez en 1894, fue especialmente relevante en el campo de la geometría de nuestro país, así como su autor.

LOS NÚMEROS NEGATIVOS EN LOS TEXTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA EN ESPAÑA EN EL S. XIX

Analizaremos a continuación el estudio de las soluciones negativas que ofrecen los autores citados anteriormente en cada uno de los periodos considerados.

1836-1857. Nacimiento y desarrollo de la segunda enseñanza

En las obras de Vallejo y Lacroix encontramos dos interpretaciones de las soluciones negativas. En la primera se propone un cambio de posición y por tanto deben construirse en sentido contrario de las positivas. Así, Vallejo indica que:

> 97. Es indiferente el tomar estas partes [*a*, *b* y *c*] hacia la derecha ó hacia la izquierda del punto que se elige, que se llama *punto de origen*; pero lo esencial es, que si las cantidades positivas se toman de izquierda á derecha, como las negativas influyen en sentido opuesto al de las positivas, se deben tomar de derecha á izquierda: Si las primeras se tomasen de abajo arriba, las segundas se deberían tomar de arriba abajo; y en general, eligiendo á arbitrio la posición de las cantidades positiva, la de las negativas será exactamente la contraria a las primeras (Vallejo, 1817: 68).

Y análogamente, Lacroix:

> 74. En la aplicación del álgebra á la geometría el signo – se interpreta en general como se hace respecto á los números, invirtiendo de cierto modo el enunciado de la cuestión, ó tomando en ellas las líneas que son afectadas de tal signo en un sentido contrario á aquel en que se las habia supuesto desde luego (Lacroix, 1846: 117).

La segunda interpretación que hacen ambos autores es que una solución negativa indica un error en las hipótesis del problema, o un cambio en este que da lugar a otras versiones del problema o a otro más general. Por ejemplo, encontramos en la obra de Vallejo la siguiente cuestión:

> Propongámonos ahora prolongar una recta dada, dividida de un modo cualquiera, con la circunstancia de que el rectángulo formado por la línea, después de prolongada, y por la prolongacion, sea igual al cuadrado de la distancia que hay desde el punto de division hasta el estremo [sic] de la prolongacion (Vallejo, 1817: 78).

Vallejo estudia las soluciones que tiene el problema dependiendo de los valores de los datos, y aparecen soluciones negativas. Propone que tales soluciones indican un error en el enunciado del problema, y se debe cambiar:

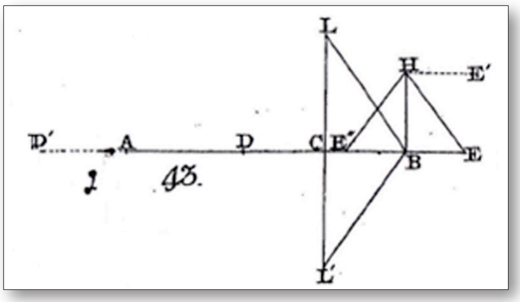

Fig. 1. Representación de las soluciones del problema (Vallejo, 1817. Lámina 2).

> Pero si $b > \frac{1}{2}a$, el punto D caerá hácia la izquierda de A, por egemplo en D', y será AD' una cantidad negativa; luego la CL se deberá tomar por la parte inferior de la AB, esto es, estará representada por la CL'; uniendo el punto L' con el punto B y tirando por H la HE" paralela á BL'; la prolongacion BE" será negativa, y espresará que en este caso no se puede efectuar la prolongacion pedida, á ménos que no se trastorne el enunciado de la cuestion; por lo que el problema se deberia proponer diciendo en vez de *prolongar*, *acortar*, etc. (Vallejo, 1817: 78).

Lacroix también hace esta interpretación de las soluciones negativas y lo hace con más detalle que Vallejo, dando las pautas para convertir las raíces negativas en positivas.

> Antes de pasar adelante debemos recordar que las cantidades negativas tienen su origen de aquellas sustracciones que no pueden efectuarse en el orden en que ellas se hallan indicadas, porque la cantidad que se ha de restar es mayor que la de quien se ha de restar. Por esta circunstancia se reconoce que hay un error en el enunciado de aquella cuestion, ó á lo menos en su aplicación al caso particular que se tiene en consideración, y quitando este error, esto es, modificando el enunciado de la cuestion, de suerte que se haga posible la sustraccion que antes no podía ejecutarse, se deberá tener un resultado positivo... (Lacroix, 1846: 117).

Aunque aclara que en algunos casos, en particular cuando las soluciones se construyen sobre una recta, no es necesario hacer esta corrección, pues el signo de la solución nos indica la inversión de que es susceptible el enunciado:

> ... mas para ciertas cuestiones, aquellas por ejemplo, que conducen á ecuaciones del primer grado, no hay necesidad de tomarse este trabajo. El mismo signo del resultado indica la inversion de que es susceptible el enunciado; y los valores negativos empleados del modo que expresan las reglas establecidas para efectuar las operaciones sobre las cantidades afectadas del signo –, satisfacen también á las cuestiones como los que son positivos; esta es la razón por la que se ha cambiado la denominación de *raices falsas*, que en otro tiempo daban los analistas á las raices negativas de las ecuaciones (Lacroix, 1846: 118).

Esta interpretación de los números negativos como indicadores de un error en el enunciado o de algún elemento susceptible de cambio es original de D'Alembert y se encuentra también en la obra de Bezout y de Carnot, quienes tuvieron una importante influencia en la obra de Lacroix (Schubring, 2005).

Alberto Lista da tres interpretaciones de las soluciones negativas: o bien indican un cambio de sentido, o un error en el enunciado (al igual que Vallejo y Lacroix), o la existencia de cantidades «indirectas». Para explicar la construcción e interpretación de las soluciones negativas introduce el concepto de figuras y cantidades directas e indirectas que aplica en varios problemas (Sánchez, 2015).

> 20. Cuando dos figuras no se diferencian sino en el tamaño de sus partes, y estas están colocadas ambas en un mismo sentido, se dice que las figuras están en correlacion directa. La ecuacion que ligue entre sí las partes de dichas figuras, debe ser la misma para ambas; pues son casos particulares de una misma cuestion (Lista, 1825: 125).

Parece que está hablando de figuras semejantes, pero seguidamente pone un ejemplo en el que vemos que eso no es así.

> 21. Cuando dos figuras estan entre sí combinadas de tal manera, que una parte es en la una la suma de dos líneas, y en la otra es la diferencia de las mismas líneas, se dice que las figuras están en *correlacion indirecta*; y las ecuaciones, que las representen, deben diferenciarse en el signo de la línea, que es sumando en la una y substraendo en la otra. Las líneas que se añaden en una figura, y se restan en la otra, y que por consiguiente varian de signo en la ecuacion, se llaman *indirectas*. Para abreviar la frase, se suelen llamar las figuras directas ó indirectas segun su correlacion.

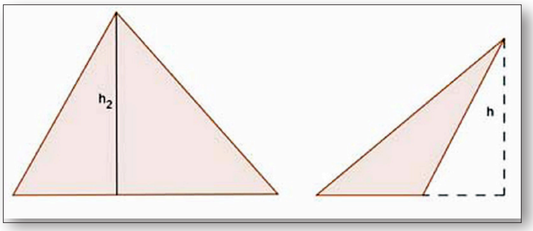

Fig. 2. Ejemplo de figura directa e indirecta.

Ejemplo. Comparando entre sí dos triángulos, cuyas alturas caigan una dentro y otra fuera, son indirectos, porque la distancia de un vértice A á la perpendicular en el uno es = á la base menos el otro segmento; y en el otro la distancia del vértice correspondiente á la perpendicular es igual á la base mas el otro segmento. Este segmento, que es substraendo en la primera figura, y sumando en la segunda, es la cantidad indirecta (Lista, 1825: 126).[2]

Lista continúa explicando que, en un problema, sirve la misma ecuación para las dos figuras, con tan solo variar el signo de aquellas cantidades que pasan de directas a indirectas:

> 22. Una misma ecuacion puede servir para dos figuras indirectas, variando el signo, en la ecuacion hallada para la primera figura, á las cantidades que se hacen indirectas en la segunda (Lista, 1825: 126).

Y finalmente cómo se han de interpretar y construir las soluciones negativas de una ecuación:

> 23. Cuando de la resolucion de un problema geométrico resulta un valor negativo de la incógnita *x*, se muda el signo de esta en la ecuacion, y se tendrá la condicion á que satisface dicho valor negativo. Entonces se conocerán las líneas que se hacen indirectas en el problema, para que el valor negativo de *x*, hecho positivo, lo satisfaga (Al.21.3º)[3] (Lista, 1825: 126).

Es decir, cuando se obtiene una solución negativa se ha de cambiar de signo para convertirla en positiva, y se observa el efecto que este cambio produce en la ecuación inicial viendo qué líneas pasan de ser directas a indirectas para construirlas en sentido contrario que en el caso de la solución positiva.

También estudia cómo varía una cantidad que pasa de directa a indirecta de forma continua.

> 25. *Toda cantidad variable, que de directa se hace indirecta, se hace igual á cero ó igual al infinito en el valor intermedio*.
>
> Dem. Si la cantidad x se hace indirecta, será sumando antes y substrayendo despues; de modo que habrá dos cantidades a y b tales que $a=b+x$, cuando x es directa, y $a=b-x$, cuando es indirecta. En el primer caso $x=a-b$, en el 2º $x=b-a$: luego en el primer caso a era mayor que b, y en el 2º menor; luego en el intermedio ha habido un caso en que $a=b$, y $x=0$.
>
> Puede suceder que el valor de x se determine por una fórmula de esta especie $x=\frac{A}{a-b}$, y entonces en el caso intermedio en que $a=b$, será $x=\infty$ luego, etc. (Lista, 1825: 127).

Este tratamiento de los números negativos lo veremos en la obra de Zorraquín, quien explicita en el prólogo del libro que se ha basado en la obra de Carnot. Sin embargo Lista no lo cita en ningún momento.

Por otra parte, en otros casos hace la interpretación de que las soluciones negativas se deben construir en sentido contrario de las positivas; es el caso en que dichas soluciones deben representarse sobre una recta:

2. En el libro no hay figuras, las hemos insertado para una mejor comprensión del concepto.
3. Es una referencia que él inserta. Suponemos que Al se refiere a álgebra.

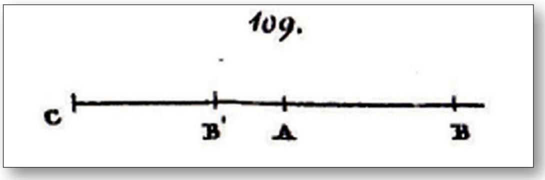

Fig. 3. Representación de las soluciones negativas en una recta (Lista, 1825. Lámina 3).

24. Si la x representa una parte, que se debe tomar sobre una recta desde un punto fijo, el valor negativo satisface al problema, tomándolo desde dicho punto fijo hácia la parte opuesta á aquella en que se hubiera tomado, si la x hubiera sido positiva (figura 109). Porque sea *A* el punto fijo, y sea la incógnita x la distancia de *A* á *B*, quedando este punto *B* determinado por una condicion establecida, sobre la cual se funda la ecuacion (2). Sea *C* otro punto cualquiera fijo tomado en la línea. Cuando este punto *B* está á la derecha de *A*, es *CB=CA+AB*: cuando está á la izquierda es *CB'=CA–AB'*: luego *AB* es cantidad indirecta, y su signo debe mudar de un caso para otro: luego el valor negativo de x debe interpretarse tomándolo á la izquierda del punto *A*.

Tras esto hace una interesante reflexión:

La análisis da negativo este valor, por la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion; pues en dicha figura hemos puesto el punto buscado *B* á la derecha de *A*, debiendo estar á la izquierda, segun lo ha hecho conocer el cálculo, dando negativo el valor de x (Lista, 1825: 127).

Es decir, no considera que las soluciones negativas sean absurdas, sino que deduce que se han obtenido porque se ha partido de una premisa errónea al plantear geométricamente el problema.

Odriozola explica cómo se construyen y se interpretan las soluciones negativas de un problema a medida que van surgiendo en el estudio de los casos generales. La única interpretación que encontramos en su obra es la de que deben construirse en sentido contrario a las positivas. Así, por ejemplo, cuando explica la construcción de $x = a \pm b$, tras estudiar los casos en que a > b, trata el de $x = a\text{-}b$, con $b > a$:

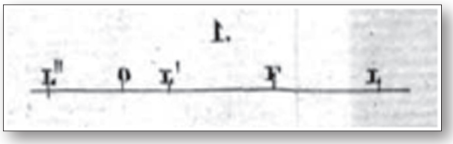

Fig. 4. Construcción de una línea negativa (Odriozola, 1829. Lámina 1).

Puede suceder que sea $b>a$, de modo que, al retroceder desde *F* ácia el origen, resulte *b=FL";* en este caso x habrá pasado á ser menor que cero en la cantidad *OL"*, y será *OL"*= $-x = a-b$. Por esto, siempre que se haya de construir una línea espresada con signo negativo, es necesario trazarla desde el origen ácia la parte opuesta de la que ocuparía si fuese positivo el signo (Odriozola, 1829: 184).

Sin embargo, cuando estudia los cocientes hace una reflexión sobre cómo puede pasar un valor de positivo a negativo. Toma $x = \pm \frac{ab}{k}$, con $k = e \pm f$, y señala:

Hasta aquí hemos considerado las líneas negativas, como si hubiesen llegado á tener este signo pasando por el valor cero desde positivas: así puede considerarse también *k*, pero no *x*; porque en el caso de *k=0*, sería $x = \frac{ab}{0} = \infty$ de modo que ha llegado x de positiva á negativa pasando por el infinito. Conocemos ya dos modos diferentes de haber cambio de signo en la espresion de una línea, conformes á los que reconocimos en casos de ocurrir este accidente en la cantidad general (Algebra elemental 131) (p. 185).

Esta reflexión la hemos visto en Lista y la veremos también en la obra de Zorraquín. Se consideran las cantidades como continuas al provenir de expresiones algebraicas (de hecho Odriozola nos remite al álgebra), pudiendo tomar cualquier valor. La diferencia entre Zorraquín y Odriozola, como veremos, es que mientras que el primero utiliza esta propiedad como una característica de las cantidades que cambian de signo, para saber en un problema qué cantidades pueden pasar de positivas a negativas y dar nuevas interpretaciones de aquel, Odriozola simplemente hace la reflexión cuando aparece el caso, pero no lo utiliza para resolver ningún problema.

1857-1906. La modernización de las ciencias en España

Zorraquín hace un estudio de las soluciones negativas similar al de Alberto Lista, aunque mucho más amplio, y además hace alusión a la fuente de la que ha tomado esa teoría, que no es otra que Carnot:

> 16. Carnot en su interesante Geometría de posición se ha dedicado á fijar la idea que debe formarse de las expresiones llamadas impropiamente cantidades negativas que resultan como soluciones de los Problemas de Geometría. Para la mas fácil inteligencia expondremos su teoría, aplicándola á un ej. particular, sin que por eso deje de tener toda la generalidad necesaria (Zorraquín, 1819: 26).

Su manera de trabajar consiste en plantear un problema con los datos que se tienen, resolverlo y a partir de ese obtener las soluciones de todos los problemas posibles que se pueden plantear con los mismos datos, que nos darían lo que él llama los sistemas correlativos al inicial. El ejemplo que pone es con un triángulo.

> X. Propongámonos hallar el segmento *DC* formado por la perpendicular *AD* bajada sobre la base *BC* de un triángulo desde el ángulo opuesto (Zorraquín, 1819: 26).

Plantea el problema inicialmente con un triángulo acutángulo, pero considera después un triángulo obtusángulo obteniendo un *sistema correlativo*.

Para resolverlo considera el triángulo *ABC*, acutángulo. Mediante la aplicación del teorema de Pitágoras a los triángulos *ABD* y *ADC*, obtiene la ecuación $a^2 + b^2 -2ax = c^2$...(I), de donde $x = DC$. Y continúa haciendo la siguiente reflexión:

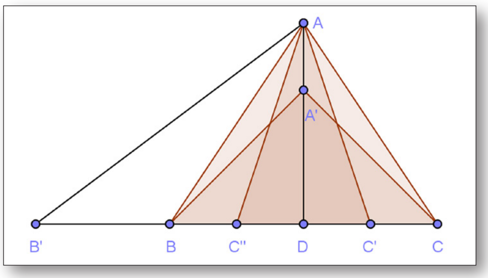

Fig. 5. Representación del problema, con Geogebra.

> Pero si el punto *C* pasa á *C"*, siendo *ABC"* el triángulo propuesto, no se podrá decir como en el caso anterior *BD* = *BC"* – *C"D*, sino = *BC"* + *C"D* = $a + x$, asi pues la fórmula (I) se convertirá en $a^2 + b^2 + 2ax = c^2$... (2).
>
> La diferencia entre las dos proviene solo de los signos que preceden á los segmentos *DC*, *DC"*, ó lo que es lo mismo de la diferente posición que en ambos casos tiene la base respecto de la perpendicular (Zorraquín, 1819: 26).

En este nuevo sistema algunas cantidades aparecen con signo opuesto con respecto al anterior, son las que denomina cantidades en orden inverso. A partir del problema define *sistemas correlativos* –que en este caso serían todos los triángulos que cumplen las hipótesis del problema–, así como sistemas directamente e inversamente correlativos:

> Si dos de éstos son tales que les conviene exactamente el mismo razonamiento, ó una serie de razonamientos de todo punto semejantes, en términos que la ecuación *X=0* hallada para el uno sirve para el otro con solo substituir los valores correspondientes, pero sin otra modificación ni cambio de signos, se dice que son *directamente correlativos*; y cuando esta circunstancia no se verifica, que lo son indirectamente (Zorraquín, 1819: 27).

También define cuándo ciertas cantidades están en orden directo o inverso: dos cantidades están en orden directo cuando al pasar de un sistema a otro su diferencia no cambia de signo, y en orden inverso cuando sí lo hace. En el ejemplo anterior $DC = BC - BD$ y $DC = B'C - B'D$ son directas; $DC = BC - BD$ y $DC'' = BD - BC''$ son inversas (1819: 27).

Para calcular las soluciones de un nuevo problema al pasar de un sistema correlativo a otro, simplemente busca en el problema de partida las cantidades que son inversas y las cambia de signo en la ecuación de partida. La nueva ecuación así obtenida nos da las soluciones del nuevo problema sin necesidad de tener que plantearlo desde cero como un problema distinto, lo que enuncia como regla general:

> Que dada una formula X=0 correspondiente á un sistema primitivo, para hacerla aplicable á otro que le sea indirectamente correlativo, ó bien para deducir de aquella la Y=0 que pertenece al 2º deben mudarse en la Iª los signos de las cantidades inversas (Zorraquín, 1819: 28).

Y recíprocamente, si al comparar las ecuaciones de dos sistemas correlativos vemos que el signo de alguna cantidad ha cambiado, eso significa que es inversa:

> Recíprocamente si al hacer uso de $X=0$, para un sistema correlativo hallamos que algunas cantidades han mudado de signo, que llamaremos de correlación, y dan otra fórmula $Y=0$, será prueba de que son inversas (Zorraquín, 1819: 28).

Pero concluye al final que no será necesario resolver las ecuaciones de todos los sistemas correlativos, pues la de partida nos dará todas las soluciones posibles, sin más que cambiar de signo las cantidades inversas en la solución y no en la ecuación, ya que si «se toma por incógnita sin mudarla el signo como debiera ser, es claro que con el mismo aparecerá en el resultado; el cálculo dará para ella el verdadero valor, pero con signo negativo, que por lo tanto deberá hacerse positivo» (p. 29). Por tanto las soluciones negativas no son más que las soluciones positivas de un sistema inversamente correlativo al que se ha tomado para resolver el problema.

Da ahí la interpretación de las soluciones negativas, en primer lugar en el caso de que aparezcan aisladas:

> 20. De lo dicho se infiere que una solución negativa aislada prueba, ó contradicción en las condiciones del Problema que por esta razón no puede resolverse sin modificarlas; ó la existencia de una cantidad inversa que por conservar su signo en el cálculo ha sido causa de que las ecuaciones y los razonamientos que éstas expresan, se refieran á un sistema que tiene con el verdadero una correlación indirecta. Que en este 2º caso para rectificar las ecuaciones y hallar la figura á que pertenece el Problema si admite solución, debe mudarse en ellas y en el resultado el signo de la incógnita, y dedicarse á conocer el nuevo sistema á que son aplicables éste y aquellas, pues solo á él y á las ecuaciones rectificadas puede pertenecer el valor que dé una verdadera solución (Zorraquín, 1819: 30).

Y explica cómo proceder en el caso de obtener una solución negativa aislada: se vuelve a la ecuación primitiva y se examina para averiguar «la contradicción que encierran los datos y la modificación que exigen» (p. 31). Si no existe tal contradicción, estamos en el caso en que se ha introducido una *cantidad inversa* y explica cómo proceder para averiguar si una magnitud lo es:

> Con este objeto observemos que si en un sistema se tiene $a+x=b$ y en otro $a-x=b$, para el 1º será $x=b-a$ y para el 2º $x=a-b$ y puesto que siendo $b>a$ ha pasado á ser $b<a$, y además la variación se ha verificado por continuidad, habrá habido un caso en que $a=b$ y $x=0$. Del mismo modo quando $x=\frac{1}{b-a}$ se convierte en $x=\frac{1}{a-b}$, resulta para x el valor intermedio $\frac{1}{0}=\infty$. Concluiremos pues que *una cantidad inversa no puede hacerse directa por el movimiento continuo de las partes del sistema á que pertenece sin pasar por 0 ó ∞* (Zorraquín , 1819: 31).

Esta idea, que ya hemos visto en las obras de Lista y Odriozola, proviene de Carnot:

> In 1814 Carnot even sees a relation between his approaches for the analyse infinitesimal and the quantités directes et inverses: they show «much analogy». In the former case, for an invariant system of quantities, one observes a second comparison system whose quantities transform into the quantities of the initial system through a continuous approximation to the limit. In the latter case, one likewise compares the quantities of two systems, and these are the absolute values in both systems that are equal to each other at the limit (Schubring, 2005: 357).

En lo explicado por Zorraquín en el párrafo anterior vemos reflejada esa idea de las cantidades que se hacen iguales en el límite. Esta propiedad nos daría una condición necesaria para ser cantidad inversa, pero añade que el recíproco no es cierto ya que aunque x sea una cantidad inversa, x^2 no lo es, a pesar de haber sido 0 o ∞ a la vez que x (p. 31).

Otra de las interpretaciones que encontramos en la obra de Zorraquín es la de la construcción de las soluciones negativas en sentido contrario a las positivas. Eso se llevará a cabo cuando las soluciones deban construirse sobre una recta:

> Luego por regla general, siempre que el objeto de un Problema sea determinar la distancia de un punto desconocido al origen, debe suprimirse el signo de las soluciones negativas, y tomar las cantidades absolutas en sentido contrario al supuesto en la ecuación primitiva (Zorraquín, 1819: 42).

Por último señalar una observación que hace cuando en un problema hay soluciones positivas y negativas:

> ... el caso en que la incógnita tenga varios valores unos positivos, y otros negativos. Los I^os^ podrán satisfacer realmente á la cuestión propuesta; los 2^os^ ó indicarán lo que acabamos de manifestar ó pueden provenir de que las transformaciones algebraicas han introducido algunas raices insignificantes con las positivas, las solas que pueden dar una solución completa y directa (Zorraquín, 1819: 30).

En la obra de Gómez Santa María, quien dedica todo un capítulo al estudio de las soluciones negativas de una ecuación, solo encontramos una interpretación de estas: que indican un cambio de sentido y por tanto deben construirse en sentido contrario las positivas.

> Obsérvese desde ahora que cuando en una misma cuestion [...], se ha de añadir y sustraer una línea cualquiera de otra *A*, es claro que si á la parte derecha de dicha *A* se colocó el radical ó línea-sumando para obtener la suma, desde el estremo derecho de *A*, se habrá de colocar hácia la izquierda la que se reste, para determinar su diferencia, porque si bien en los problemas donde solo se trata de hallar longitudes como sucede hasta aquí, viene á ser indiferente colocar el sustraendo desde uno cualquiera de sus estremos hácia el otro, parece natural, no obstante, que si las agregaciones de líneas se van haciendo en un sentido ya fijado de antemano, las segregaciones se verifiquen en opuesto sentido [...]. Esta suposición que en nada perjudica a la ejecucion de una resta aislada y que se aviene completamente al buen discurso, es de la mayor transcendencia en otras cuestiones que se habrán de examinar en lo sucesivo; y en ellas se verá que es necesario estimar las cantidades negativas de la manera indicada (Gómez, 1846: 25).

Y como ejemplo hace la construcción de las raíces de $X^2 - 2AB = B^2$, es decir, $X = A - \sqrt{A^2 + B^2}$ y $X = A + \sqrt{A^2 + B^2}$, en las que aparece un segmento con signo negativo. Tras realizar la construcción geométrica obtiene $DE' = \sqrt{A^2 + B^2} - A$, que no es la solución buscada, sino su opuesta, siendo la solución, por tanto $-DE' = A - \sqrt{A^2 + B^2}$ (p. 26), pero considera que este cambio de signo no indica que no sea posible construir la solución, sino que debe hacerse en sentido contrario:

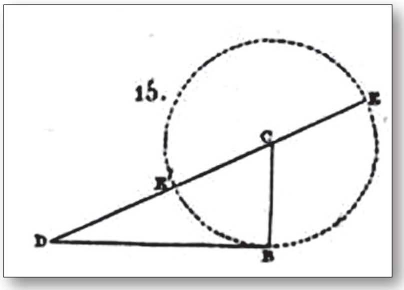

Fig. 6. Soluciones de una ecuación de segundo grado (Gómez, 1846. Lámina 1).

Esta cantidad negativa aislada, no puede interpretarse como indicio de la imposibilidad en las construcciones; luego es evidente que solo manifiesta un cambio de posicion para la magnitud DE' (Gómez, 1846: 26).

Para mostrar esta teoría de forma más clara, construye unos valores más generales de $X : X = A + C + \sqrt{A^2 + B^2}$, $X = A + C - \sqrt{A^2 + B^2}$, siendo «C una línea cualquiera conocida» (p. 26), y saca como conclusión que un signo negativo en el Álgebra indica siempre una resta:

> En general, «siempre que el álgebra dá á una cantidad el signo negativo, indica una sustracion por efectuar»; si existen cantidades de quienes pueda ser restada, se satisface la cuestion con la ejecucion de la resta, pero si no aparecen las cantidades de quienes pueda sustraerse, deberá permanecer el signo como indicacion de que ha de practicarse la operación que señala, y que realmente queda por efectuar por falta de medios hábiles de conseguirlo (Gómez, 1846: 27).

Por último, Juan Cortázar no desarrolla una teoría específica sobre segmentos negativos, simplemente interpreta las soluciones negativas cuando aparecen en alguno de los problemas. Considera los números negativos como indicadores de un cambio en las condiciones del problema o de un cambio de sentido. No habla de cantidades directas e inversas; sin embargo, trata las soluciones negativas de la misma manera que Zorraquín, es decir, cambia el signo de la incógnita en la ecuación que ha resuelto el problema y de la nueva ecuación obtiene otro problema en el que las soluciones negativas son válidas. Vemos esto en la solución del siguiente problema: *Dividir una recta en media y estrema razón* [sic] (p. 22).

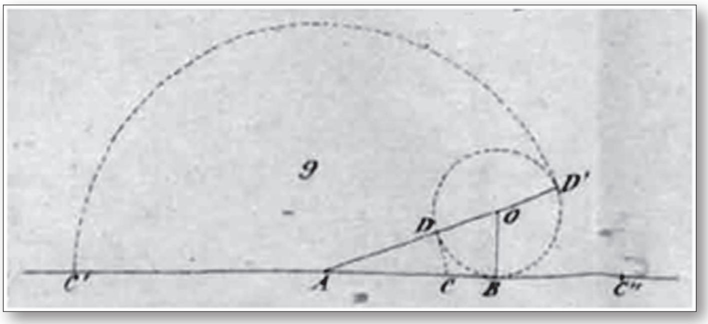

Fig. 7. División de un segmento en media y extrema razón (Cortázar, 1862. Lámina 1).

La ecuación que hay que resolver es: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, que tiene como soluciones: $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$. Cortázar construye los valores de x teniendo en cuenta que el radical es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $\frac{a}{2}$ y a, y estudia la solución negativa. En principio considera que no es solución del problema dado, pero cambiando el signo lo es de uno nuevo, o incluso de uno más general en el que las dos soluciones son válidas:

> El valor negativo no corresponde á ningún problema; pero mudado de signo corresponderá á un nuevo problema análogo al actual. En efecto, mudando el signo de x en la ecuación [1], la nueva ecuación será $\frac{a}{-x} = \frac{-x}{a+x}$ ó $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, ecuación que corresponde á este problema:
>
> *Dados dos puntos A y B sobre una recta indefinida AB, hallar un tercer punto sobre la misma, y fuera de los dos puntos dados, tal que su distancia al punto mas próximo sea media proporcional entre su distancia al mas lejano y la de los dos puntos dados* (Cortázar, 1862: 22).

Construye la solución tomándola en sentido contrario:

> Resolviendo esta ecuación, los valores x serán los mismos hallados ya en la primera ecuación, mudados los signos, pues la nueva ecuación es la transformada en $-x$ de la primera. Construidos estos valores, el positivo será *AD' y* el negativo *–AD:* luego haciendo centro en *A* y describiendo hacia la izquierda el arco *D'C'*, se tendrá el punto pedido *C'* (Cortázar, 1862: 23).

Concluye que ambos problemas están comprendidos en uno más general:

> Los dos problemas que acabamos de resolver están comprendidos en este otro general.
> *Dados dos puntos sobre una recta indefinida, hallar sobre la misma recta un tercer punto*, *cuya distancia á uno de los dos puntos dados sea media proporcional entre su distancia al otro punto y la de los dos puntos dados* (Cortázar, 1862: 23).

En una nota al final del problema señala los objetivos al proponerlo:

> NOTA 1. [...] al proponer el problema tercero, [...] nos proponíamos presentar un ejemplo, en el cual se verificase que el valor negativo de la incógnita de un problema de condiciones restrictivas, tomado positivamente, corresponde á otro problema análogo al propuesto, y también de condiciones restrictivas; y que quitadas dichas condiciones restrictivas, resulta otro problema general, al cual corresponden los dos valores que tiene la incógnita en cualquiera de dichos problemas, tomando el valor negativo, mudado él signo, en sentido contrario del positivo.

Y concluye un principio general sobre las soluciones negativas:

> Podemos pues sentar este principio: *Si un problema es susceptible de soluciones de sentido contrario*, *los valores negativos de las incógnitas, mudados los signos y tomados en sentido contrario de los positivos, resolverán el problema* (Cortázar, 1862: 24).

Las obras de Mundi, Sánchez Solís y Miguel Vegas son radicalmente distintas a las estudiadas en los años anteriores; en ellas la Geometría Analítica se estudia englobada dentro de la Geometría Proyectiva y no aparece ningún tipo de dificultad relacionada con el tratamiento de los números negativos. Solamente en la obra de Sánchez Solís se hace una revisión rápida de la *Aplicación del Álgebra a la Geometría*, pero sin hacer alusión a las soluciones negativas.

Podemos ver resumidos estos resultados en la tabla 1.

Tabla 1.
Interpretación de las soluciones negativas en los diferentes textos

Autor/texto	*Cambio de sentido*	*Error en el enunciado*	*Enunciado más general o existencia de una cantidad inversa*
Vallejo, J. M. (1817)	x	x	
Zorraquín, M. (1819)	x		x
Lista, A. (1825)	x		x
Odriozola, J. (1829)	x		x
Lacroix, S. F. (1846)	x	x	
Gómez Santa María, A. (1846)	x		
Cortázar, J. (1862)	x		?
Mundi, S. (1883)			
Sánchez Solís, I. (1883)			
Vegas, M. (1906)			

CONCLUSIONES

Como se ha visto, durante gran parte del siglo XIX los matemáticos seguían teniendo grandes reservas en torno a las cantidades negativas que había que justificar en cada caso, algunas veces en cada problema que resolvían. El tema de la interpretación de las soluciones negativas aparece en todas las obras anteriores a 1880 y no varía prácticamente nada durante todo este tiempo.

En el periodo 1836-1857 observamos que las obras aprobadas oficialmente a partir de 1845 son las que se venían utilizando desde principios de siglo, y algunas de ellas se seguirán utilizando como texto en la Facultad de Ciencias, por lo que el estudio y la interpretación de las soluciones negativas no variarán durante estos años. Tampoco vemos grandes novedades en la obra de Cortázar, publicada en los años sesenta. Podemos decir, por tanto, que las diferencias halladas durante los tres primeros cuartos de siglo dependen más del autor del texto y de las influencias recibidas que de la fecha de publicación de la obra. Estas influencias son claramente francesas, aunque en unos casos provienen de D'Alembert y en otros de Carnot.

Aunque en todos los autores estudiados se interpretan las cantidades negativas como indicadoras de un cambio –bien en las condiciones del problema, bien en el sentido en que se deben representar–, existen algunas diferencias en el tratamiento de estas que nos permiten distinguir tres concepciones, de manera que cada una va incluyendo la anterior, a la cual amplía.

La primera sería que las cantidades negativas indican un cambio de posición y que por tanto deben construirse en sentido contrario a las positivas. Esta interpretación la hacen todos los autores señalados anteriormente.

La segunda concepción entiende las soluciones negativas de una ecuación como indicativas de un error en las hipótesis del problema, o de un cambio del que es susceptible, que da lugar a otras versiones del problema o a otro más general. Esta interpretación, originaria de D'Alembert, es la adoptada por Vallejo en su *Tratado* y por Lacroix. En este caso también se indica que las cantidades negativas deben tomarse en sentido contrario algunas veces, lo que incluye el caso anterior.

Otros autores piensan que las soluciones negativas indican o una contradicción en las condiciones del problema o la existencia de una cantidad inversa. La teoría de los sistemas correlativos, que es la que da esta interpretación de las soluciones negativas de un problema geométrico, fue desarrollada por Carnot, como ya hemos señalado. Podemos encontrarla en las obras de Zorraquín y Lista. También en Odriozola vemos una breve referencia cuando habla del paso de cantidades negativas a positivas de forma continua a través de cero o ∞. Por otra parte, Cortázar no habla de cantidades correlativas, pero trata las soluciones negativas de forma análoga a como lo hace Zorraquín, aunque el primero habla de «condiciones restrictivas» y no de «contradicción en las hipótesis del problema», como este último.

En el último cuarto de siglo comienza la evolución en el campo de las Matemáticas en España, evolución que se vio reflejada en el estudio de la Geometría Analítica en general y en el de las soluciones negativas en particular, como hemos visto en el análisis de las obras escritas a partir de 1880. Con la transformación de la Geometría Analítica y el recurso a la Geometría Proyectiva las reticencias de los matemáticos en cuanto a las cantidades negativas desaparecen bruscamente.

Hoy en día la Geometría Analítica dista mucho de la vista en los autores analizados, y las soluciones negativas no suponen un problema, ya que una vez dado el paso de la Geometría al Álgebra no se considera necesario construir las soluciones geométricamente. Pero esta separación entre Geometría Analítica y Sintética tiene como consecuencia una pérdida de la visión geométrica del problema, lo que acarrea en numerosas ocasiones, al menos en el nivel de secundaria, dificultades tanto en el planteamiento del problema como en la interpretación de las soluciones obtenidas, sean positivas o negativas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bagni, G. (2000). The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. *Proceedings of CERME-1*. En I, Schwank (ed.). II. Forschungs institute fuer Mathematik didaktik, Osnabrueck, pp. 220-231.

Choppin, A. (2000). Los manuales escolares de ayer a hoy el ejemplo de Francia. *Revista interuniversitaria*, 19, pp. 13-37.

Collados, E. (2008). El concepto de dibujo y su práctica en los libros de texto de educación primaria publicados en España en el periodo comprendido entre 1915-1900. *Historia de la Educación*, 27, pp. 323-346.

Delgado, B. (1983). Los libros de texto como fuente para la historia de la Educación. *Historia de la Educación*, 2, pp. 353-358.

Descartes, R. (1637). *La Geometría*. Traducido por Pedro Rossell. Buenos Aires: Espasa-Calpe, 1947.

Etayo, J.J. (1992). El reinado de la Geometría Proyectiva. *Historia de la Matemática*, pp. 115-138. Disponible en línea: <http://dmle.cindoc.csic.es/revistas/detalle.php?numero=5161> (consulta: enero de 2012).

Gall, M.; Borg, W. y Gall, J. (1996). *Educational Research: An introduction*. New York: Longman.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (coord.). *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la SEIEM*, pp.79-85. Granada: Universidad de Granada.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA.* 7(3), pp. 251-292.

González, P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 45, pp. 17-28.

Maz, A. (1999). La historia de las matemáticas en clase: ¿por qué? y ¿para qué? En M. I. Berenguer; J.M. Cardeñoso y M. Torquero (eds.). *Investigaciones en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad* (pp. 205-209). Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática.

— (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González; M.T. González y J. Murillo (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemática españoles de los siglos xviii y xix. *PNA*, 1(3), pp. 113-123.

— (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), pp. 537-554.

— (2015). Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas en los siglos xviii y xix. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), pp. 49-76. https://doi.org/10.12802/relime.13.1812

Maz, A.; Torralbo, M. y Rico, L. (eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Millán, A. (1991). Los estudios de Geometría Superior en España en el siglo xix. *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*, 14, pp. 117-186.

Peralta, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX.* Madrid: NIVOLA.

— (2009). La matemática española del siglo xix. Fundación Orotava de Historia de la Ciencia (ed.). *La ciencia antes de la gran guerra. Actas año XVII. Encuentros educativos* (pp. 211- 236). Canarias: Imprenta Reyes, S. L.

Puelles Benítez, M. (2000). Los manuales escolares: un nuevo campo de conocimiento. *Historia de la Educación*, 19, pp. 5-11.

Rico, L. *et al.* (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA*, 58, pp. 7-23. FESPM

Sánchez, I.M. (2015). La Geometría Analítica en los libros de texto para secundaria y universidad en España en el siglo xix. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), pp. 41-51.

— (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York: Springer.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En L. Rico (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. pp. 179-194. Barcelona: Horsori.

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX.* Zaragoza: Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Facultad de Ciencias (Matemáticas).

Analytical geometry in Spain during the nineteenth century: a study of the negative solutions of an equation

Isabel M.ª Sánchez Sierra
IES Vía de la Plata. Guijuelo. Salamanca
isamss@yahoo.com

M.ª Teresa González Astudillo
Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales,
Universidad de Salamanca, Salamanca, España
maite@usal.es

Negative numbers are a mathematical content that have such complexity that, historically, its acceptance and formalization had a long time to arrive and their development brought great epistemological changes through time. These difficulties are present today in secondary education, so there have been a lot of research in mathematics educations that have dealt with negative numbers form different points of view.

Our research problem is the interpretation of negative solutions in analytical geometry problems during the nineteenth century and the difficulties the geometers found about them. These difficulties had been dragging from the very beginning of the analytical geometry birth. The problem was that during the nineteenth century the objects in geometry were segments not numbers, so the literals that appeared in equations represented line segments. The way to solve problems was to translate the geometric approach to an algebraic one naming the segments involved, to solve the equation obtained and finally to build the solutions geometrically with rule and compass. All of this forced, among other things, to make an interpretation of negative solutions since they have no sense because they represented negative segments. The aim of this work is to identify the interpretations that nineteenth-century mathematicians made about these solutions.

In this research, we have used the didactic content analysis in a selection of analytical geometry textbooks from the nineteenth century. The unit of analysis were the problems solved in these books. We have centred the analysis on three aspects: the conceptual structure, the external representations and the phenomenological analysis.

We have considered two periods related to the historical and educative Spanish context. The analytical geometry appeared in secondary education textbooks during the first half of the century and in the books for the Faculty of Science from 1857. The two cited periods were 1836-1857 and 1857-1906.

We have selected ten books using two criteria: they must be in the official textbooks lists approved by the government for these two educational levels and the author would be relevant in the period considered. The books in the first period were: *Elementos de matemáticas puras y mistas* by A. Lista, *Tratado elemental de matemáticas* by J.M. Vallejo, *Curso completo de matemáticas puras* by J. Odrozola and *Curso completo elemental de Matemáticas puras* by S.F. Lacroix.

During the second period, we have distinguished two stages. One from 1857 to 1868 and we have selected three books: *Geometría analítica-descriptiva* by M. Zorraquín, *Tratado completo de matemáticas* by A. Gómez and *Geometría Analítica* by J. Cortazar. The other goes from 1868 to 1906 and the selected books were: *Lecciones de Geometría Analítica* by S. Mundi, *Geometría Analítica* by I. Sánchez and *Geometría Analítica* by M. Vegas.

The analysis of these texts has shown that the interpretation of negative solutions of a geometric problem appeared in all the texts published before 1880 and did not vary significantly during this time. The differences between the interpretations depended more on the author and on the external influences received than on the publication date. Although all these authors interpreted negative quantities as indicators of a change about the side (from right to left or vice versa), there were some differences in the treatment of these solutions that allow us to distinguish three interpretations so that each one of them includes the previous ones.

The first one was that negative quantities indicated a change of position and therefore must be constructed in the opposite direction to the positive ones. This interpretation appears in all the texts before 1880.

The second interpretation considered the negative solutions of an equation as indicator of an error in the hypotheses of the problem, or a change from which it was susceptible, which gave rise to a more general problem. This interpretation, original from D'Alembert, was the one adopted by Vallejo and by Lacroix.

Other authors considered that negative solutions indicated either a contradiction in the conditions of the problem or the existence of an inverse quantity. Carnot developed a theory of correlative systems, which provided this interpretation of negative solutions. We can find it in the texts by Zorraquín and Lista. Also in the texts by Odriozola and Cortázar we can see references to this interpretation.

In the last quarter of the century, there was a great development of mathematics in Spain, a development in the Analytical Geometry in general and in the interpretation of negative solutions, in particular. With the evolution of analytical geometry and the resource to projective geometry, the reluctance of mathematicians regarding the negative quantities disappeared abruptly.